*Artigo enviado por Valdo Fernandes para publicação no site Só Matemática (www.somatematica.com.br)*

O ESTUDO DAS CÔNICAS NO ENSINO MÉDIO: A EQUAÇÃO REDUZIDA DA ELIPSE COM OS FOCOS NO EIXO DAS ABSCISSAS E CENTRO NA ORIGEM.

Valdo Fernandes Cavalcante[[1]](#footnote-1)

Eduardo Quadros da Silva[[2]](#footnote-2)

**RESUMO**

O presente artigo decorre de questões levantadas no ensino médio, quando se passou a observar a falta de conhecimentos dos alunos relativa ao estudo das secções cônicas em especial a elipse, partindo da interpretação e aplicação de sua equação reduzida. O grande desafio na utilidade da matéria no cotidiano, aplicando-a em soluções de problemas e no entendimento de como o mundo funciona. As cônicas no ensino médio, em especial a equação reduzida da elipse com centro na origem, têm uma abordagem que costuma se limitar ao universo da geometria analítica com uma abordagem superficial e descontextualizada no cotidiano do aluno. Nesse artigo são feitas propostas para que se tenha um aprendizado onde o aluno possa perceber a interação entre a matemática e questões relacionadas a outras áreas.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Elipse. Ensino Médio.

**INTRODUÇÃO**

As Cônicas, em especial a elipse representam uma parte peculiar dentro do estudo da Matemática. Evidenciando-se suas definições, equações e propriedades que são utilizadas no conteúdo do ensino médio, além de serem muitas as aplicações das cônicas no cotidiano e na história da sociedade. Desde que o matemático grego Apolônio escreveu o primeiro trabalho sobre as Secções Cônicas, diversos matemáticos de renome contribuíram de maneira significativa no entendimento dessas curvas e suas aplicações nos mais diversos assuntos.

A elipse é a curva obtida pela intersecção de um cone e um plano secante que intercepta apenas uma de suas folhas, e corta todas as suas geratrizes. Neste caso o plano não é paralelo a nenhuma geratriz do cone. Se o plano interceptar todas as geratrizes do cone e for também perpendicular ao eixo do cone, teremos um caso especial da elipse que é a circunferência.

O presente trabalho tem como objetivo, analisar o nível de aprendizagem do aluno no ensino médio quanto à interpretação e aplicação da equação reduzida da elipse com centro na origem. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM – MATEMÁTICA, 1998, p.78), a simples apresentação de equações sem explicações fundadas em raciocínios lógicos deve ser abandonada pelo professor.

O aluno do ensino médio, no estudo das cônicas, em especial a elipse devem despertar para a interpretação e aplicação das equações, lhes será oportuno ordenadamente, observar, investigar, analisar, questionar e concluir, ou seja, realizar uma investigação. Tal investigação tem o objetivo de, envolvendo atividades com aspectos problematizadores da matemática, adentrar na interpretação e aplicação da equação reduzida da elipse a fim de que o aluno internalize, de forma adequada, o conceito matemático desejado.

O presente trabalho está dividido em partes. No capítulo 1 é feito um histórico das cônicas. No capítulo 2 a elipse é apresentada em um contexto. No capítulo 3 é apresentada a metodologia da pesquisa. No capítulo 4 são apresentados resultados e discussões. Finalmente são apresentadas as considerações finais e as referências de fontes que serviram de base para a elaboração da pesquisa.

**1-HISTORICO DAS CÔNICAS**

O primeiro estudo sistemático das cônicas deve-se a Apolônio (260-200 A.C). Este estudou as cônicas como resultado de secções feitas por um plano num cone e num duplo cone de base circular. Foi Apolônio que atribuiu as cônicas à designação ainda hoje utilizada, elipse, parábola e hipérbole. Um século antes, o matemático Menecmus tinha descoberto as cônicas de forma a solucionar o problema da duplicação de cor. Foi aí que começou a longa história que atravessou, durante 2000 anos, o desenvolvimento da matemática.

Ao longo dos tempos a família das cônicas ia sendo vista de diferentes perspectivas e, através destas, eram descobertas algumas relações entre a matemática e a realidade. Por exemplo, os pintores do renascimento inventaram a perspectiva cônica por meio da qual representavam sobre uma tela plana, com rigor quase fotográfico, objetos de vista tridimensionais quando ainda não tinha sido inventada a fotografia.

Deságües interpretou matematicamente as intuições e processos dos pintores, criando a geometria projetiva. No seu trabalho, Deságües explorava o fato de uma circunferência ser vista como uma elipse quando não a abordamos de frente, e concluiu que as cônicas se podiam obter umas através das outras por projeção. Portanto o que interessava era estudar quais as propriedades que se mantinham invariantes por projeções e assim, das propriedades da circunferência podiam deduzir-se as propriedades das outras cônicas, o que simplificou muito mais a dedução dos resultados de Apolônio. Baseando-se nos métodos de Deságües, Pascal escreveu um "ensaio sobre as cônicas" onde comunica as suas descobertas, entre as quais, o Teorema de Pascal.

Durante muito tempo pensou-se que as órbitas dos planetas eram circunferências e que a Terra era o centro. Kepler, em 1610, descobriu que os planetas giram à volta do Sol, sendo as suas órbitas elipses onde o Sol ocupa um dos focos. Edmund Halley (1656-1742). Foi um matemático e astrônomo inglês que usou as cônicas para prever matematicamenteo regresso do cometa, que acabou por ter o seu nome.

As Curvas Cônicas são produzidas por um plano secante sobre uma Superfície *Cônica de Revolução*, dependendo do ângulo que forma o plano secante com o eixo da superfície cônica, surgem diferentes curvas cônicas.

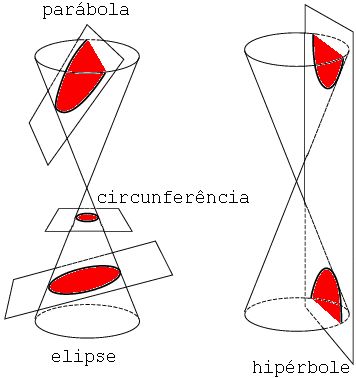


Figura 1 - Secções Cônicas geradas através da seção do Cone de Revolução por um Plano.

Se o ângulo é maior, igual ou menor que o semiângulo do vértice da superfície cônica, obtém-se, respectivamente, uma elipse, uma parábola, ou uma hipérbole.

**2-A ELIPSE EM UM CONTEXTO**

Um jardineiro ata as pontas de um fio a duas estacas. A distância entre as duas estacas é menor que o comprimento do fio.

        Mantendo o fio esticado, vai rodando e com a ajuda de outra estaca desenha uma elipse no chão, veja a figura abaixo.

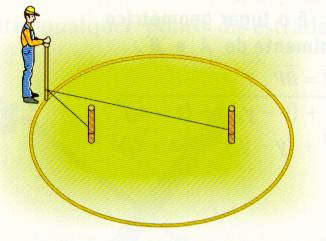


Figura 2 - Construção contextualizada da elipse.

**2.1-APLICAÇÕES DA ELIPSE**

Cônicas, os gregos clássicos - Arquimedes, Apolônio e outros - estudavam essas belas curvas por puro prazer, como forma de desafio, sem qualquer pensamento em possíveis aplicações.

As primeiras aplicações apareceram quase 2.000 anos depois, no início do século XVII.

Um dos grandes eventos da história da Astronomia em 1609, quando Kepler publicou sua descoberta de que a órbita de Marte era uma elipse, lançando a hipótese de que todos os planetas se moveriam em órbitas elípticas.

E cerca de 60 anos depois disso, Newton provou matematicamente de que a órbita planetária elíptica é causa e consequência de uma lei de atração gravitacional, baseada no inverso do quadrado da distância. Esses desenvolvimentos ocorreram centenas de anos atrás, mas o estudo das seções cônicas não é, ainda hoje, nem um pouco anacrônico.

As aplicações das cônicas em especial a da elipse estão presentes em vários campos, como, por exemplo, no cotidiano quando a superfície formada pela água dentro de um copo é elíptica, sendo circular apenas no caso em que o copo está direito, isto é, está alinhado com o *nível*, na horizontal, bastante interessante e curiosa é a propriedade reflexiva da elipse, esta propriedade faz com que a elipse tenha várias aplicações práticas.

Uma aplicação óptica vê-se no dispositivo de iluminação dos dentistas. Este consiste num espelho com a forma de um arco de elipse e numa lâmpada que se coloca no foco mais próximo. A luz da lâmpada é concentrada pelo espelho no outro foco, ajustando-se o dispositivo de forma a iluminar o ponto desejado.

Na arquitetura a aplicação da elipse é notável desde muito tempo, as formas e modelos tornam os sofisticados prédios, hotéis e diversas outras construções presentes no mundo todo um designe próprio e arrojado, dentre outras aplicações da elipse ficaremos restritos apenas as citadas acima.

**2.2-Aplicação da elipse na astronomia.**

A Geometria Analítica tem também um papel importante no desenvolvimento da astronomia. Johannes Kepler, teólogo e astrônomo alemão, analisando cuidadosamente as observações realizadas pelo astrônomo dinamarquês Tycho Brahe, descobriu a forma elíptica das órbitas dos planetas e formulou as famosas três leis do movimento planetário.

Kepler decidiu calcular a órbita da Terra concentrando-se no planeta Marte. Pela razão de ser o primeiro dos planetas exteriores, ele se move mais rapidamente em sua órbita, retornando logo a sua posição inicial, o que facilita o seu estudo.

Ao estudar a órbita de Marte, Kepler pôde verificar que esta não podia ser circular ela mais se parecia com um oval. Vários cálculos foram feitos e ele verificou que a órbita de Marte era uma elipse de excentricidade e = 0,093 com o Sol em um dos focos.

Kepler estendeu a todos os planetas do sistema solar a lei da órbita elíptica, a qual ficou conhecida como sua primeira lei e que assim se enuncia: “Cada planeta descreve uma órbita elíptica, da qual o Sol ocupa um dos focos”. E que marcou uma época na história da ciência.



Figura 3 - O Sistema Solar

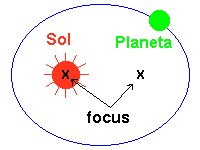


Figura 4 - Órbita elíptica, da qual o Sol ocupa um dos focos.

Mas nem todos os objetos que circulam no espaço têm órbitas elípticas. Existem cometas que percorrem trajetórias hiperbólicas, os quais ao passarem perto de algum planeta com grande densidade, alteram a sua trajetória para outra hipérbole com um foco situado nesse planeta.

**2.3-Aplicação da elipse no cotidiano.**

A superfície formada pela água dentro de um copo é elíptica, sendo circular apenas no caso em que o copo está direito, isto é, está alinhado com o *nível*, na horizontal.

Se animarmos o copo com um movimento rotativo sobre si próprio, a superfície do líquido nele inserido será a de um paraboloide. Esta técnica é frequentemente usada para se obter este tipo de superfície.



Figura 5 - A superfície formada pela água dentro de um copo é elíptica.

**2.4-Aplicação da elipse na odontologia.**

A elipse é uma curva fechada para a qual existem dois pontos especiais, os focos. A propriedade de reflexão da elipse faz com que a elipse tenha várias aplicações práticas. Uma aplicação óptica vê-se no dispositivo de iluminação dos dentistas. Este consiste num espelho com a forma de um arco de elipse e numa lâmpada que se coloca no foco mais próximo. A luz da lâmpada é concentrada pelo espelho no outro foco, ajustando-se o dispositivo de forma a iluminar o ponto desejado.



Figura 6 - Dispositivo de iluminação dos dentistas

**2.5-Aplicação da elipse na arquitetura**

A aplicação da elipse na arquitetura é notável desde muito tempo, as formas e modelos tornam os sofisticados prédios, hotéis e diversas outras construções presentes no mundo todo um designe próprio e arrojado.

Os países desenvolvidos e ricos fazem da elipse o seu principal designe não só na construção, mais em diversas outras áreas dando um toque todo especial na arquitetura clássica, moderna e contemporânea, as formas estão cada vez mais arrojadas dando estilos e uma performa cada vez mais elíptica.



Figura 7 - Elipse presente na arquitetura: Tycho Brahe Planetarium

**3-METODOLOGIA**

Inicialmente será realizada uma revisão bibliográfica para descrever as teorias que abordam práticas pedagógicas inovadoras em busca de produção do conhecimento e para apresentar aspectos teórico-práticos no estudo da interpretação e aplicação da equação reduzida da elipse. A revisão bibliográfica será feita mediante uma leitura sistemática, com fichamento de cada obra ou artigo, de modo a ressaltar os pontos pertinentes ao assunto ou estudos abordados pelos autores.

A pesquisa de campo será realizada na escola Estadual do Ensino Fundamental e Médio Adauto Cabral de Vasconcelos, Riachão do Bacamarte - PB, no primeiro semestre do ano letivo de 2012. Foi aplicado um questionário e uma atividade complementar para dez (alunos) do 3º ano do ensino médio e realizada uma entrevista com o professor regente da turma.

Antes da entrega dos questionários, foi explicada a importância da pesquisa e a necessidade de se obter respostas confiáveis para as questões. Os alunos tiveram um tempo compreendido entre quinze e trinta minutos para responder. Além do questionário, aplicou-se uma atividade complementar com os alunos sobre a interpretação e aplicação da equação reduzida da elipse com o intuito de averiguar o conhecimento prévio do aluno quanto á interpretação e aplicação da equação reduzida da elipse.

Como opção metodológica, o presente trabalho adota a abordagem qualitativa de pesquisa, pela crescente adequação desde tipo de metodologia à investigação na sala de aula.

Minayo (1994) esclarece que “a pesquisa qualitativa trabalha com um nível de realidade que não pode ser quantitativa, abordando o universo de significados, motivos, aspirações, crenças e valores” esta autora discute a importância da combinação entre teoria, método e criatividade para a produção de conhecimentos e continuidade da tarefa dinâmica de sondar a realidade de desvendar seus segredos.

Por fim, será realizada a análise e interpretação dos dados, e posteriores discursões no decorrer do trabalho.

**4-RESULTADOS E DISCUSSÕES**

Todos os alunos da turma participaram da aula, interagindo e discutindo com perguntas sobre o exercício proposto. De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96), o ensino médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos, durante o nível fundamental, no intuito de garantir a continuidade de estudos, mas também a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos. Nessa definição de propósitos, percebe-se que a escola de hoje não pode mais ficar restrita ao ensino disciplinar de natureza enciclopédica.

De acordo com as Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio, deve-se considerar um amplo espectro de competências e habilidades a serem desenvolvidas no conjunto das disciplinas, com isso foi possível coletar os dados necessários para identificar se a metodologia aplicada era eficiente para o aprendizado dos alunos, bem como o entendimento de forma clara e explicitar. O trabalho disciplinar pode e deve contribuir para esse desenvolvimento. Conforme destacam os PCNEM (2002) e os PCN+ (2002), o ensino da Matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural. Assim foi possível construir ao termino desse processo o seguinte gráfico



Este gráfico mostra que aproximadamente 77% dos estudantes conseguiram responder o exercício proposto de forma satisfatória e que aproximadamente 23% dos estudantes não conseguiram realizar a mesma. O grande desafio no processo de ensino matemático e em especial as cônicas é encontrar a melhor forma de aprendizagem, para isto é necessário desenvolver um programa dinâmico que apresente o ensino atual ligado aos problemas de hoje.

O professor não é aquele que sabe tudo, ele está ali para transmitir, conhecimentos e adquirir novos, e estes novos vêm dos alunos que também tem experiência de vida e que podem transmitir aos seus professores. Antes de tirar qualquer conclusão o aluno deve compreender a matéria e ver a sua utilidade, pois é mais fácil ensinar pessoas interessadas. No decorrer dos últimos anos, a pratica de ensino tem apresentado algumas diferenças entre professores de matemática e seus alunos, diferenças estas que acabam por comprometer a qualidade do ensino. A maioria dos alunos não tem paciência com cálculos e encaram a o conteúdo das cônicas de maneira bastante sucinta, como o terror e se esforçam apenas para atender a solicitação dos professores, cumprindo suas obrigações somente para obter notas.

PERRENOUD (2001, p.08) diz que ”os alunos hoje aprendem o momento, aprendem uma determinada matéria para fazer a prova e depois esquecem tudo. Se o professor instigar a curiosidade do aluno em sala, usando um pouco de criatividade, o aprendizado será reforçado e os estudantes adquirirão conhecimento”.

A afirmativa mostra claramente que o papel do professor de matemática é essencial no ensino das cônicas, pois, a ele não cabe somente o papel de aplicar testes e conteúdo, mas sim ajudar o aluno na aplicação de soluções para os problemas e no entendimento de como o mundo funciona. O professor tem que ter imaginação e rigor, conforme TONON (2004, p.36) para um professor ser competente não é preciso que ele seja o mais sábio.

Após tantos estudos sobre o processo ensino-aprendizagem das cônicas em especial a equação reduzida da elipse com centro na origem, pode-se afirmar que as cônicas são importantes para a vida. Nota-se também que a figura do professor é o centro das atenções e que influi muito no gosto ou não dos alunos pela as cônicas, então este deve aproveitar ao máximo os fatores que lhes são favoráveis para conquistar a sua turma, pois com uma dinâmica alegre e descontraída o professor vai conseguir obter grandes resultados.

O professor precisa ser hábil, tem que usar de todos os artifícios para despertar o interesse dos alunos. É preciso apresentar o conteúdo de maneira que faça sentido para eles e que o conteúdo venha realmente ao encontro de suas necessidades de modo que todos possam entendê-lo e aplicá-los no dia-a-dia. Os professores precisam entender que educar é permitir a criação de sonhos e mostrar aos seus alunos que os sonhos podem ser realizados e o professor deve estar ao lado comemorando o sucesso do aluno ou auxiliando no seu fracasso. Um exemplo é a história de “JOÃO E O PÉ DE FEIJÃO” se os feijões não houvessem crescido a mãe de João o ajudaria a ser mais esperto e quem sabe um dia ele se tornasse um grande produtor de feijão. Mesmo não alcançando os 100% da aprendizagem, contudo esse estudo foi de fundamental importância não só no estudo das cônicas mais para a vida e com essas pesquisas encontraremos uma metodologia eficiente e eficaz no ensino das Cônicas e da equação reduzida da elipse para ajudar os alunos que não conseguiram resolver os exercícios.

# 5-CONCLUSÃO

Neste trabalho foi possível verificar que o estudo das secções cônicas em especial o da elipse é um tema bastante desafiador quando se trata da interpretação e aplicação da equação reduzida, fazer com que os aprendizes foquem no aprendizado das cônicas tem sido um desafio para os professores do ensino médio e principalmente no ensino público, a falta de conhecimentos básicos com relação as cônicas é uma realidade bastante expressiva no cenário da educação pública em nosso país.

A pesquisa mostrou que o presente trabalho relata de forma bem clara que não só os alunos mais também os professores têm fatores determinantes que impossibilitam o ensino das cônicas no ensino médio, grande parte dos alunos da rede pública não conseguem fazer a interpretação e aplicação da equação reduzida da elipse no ensino médio.

O tema é importante para o professor porque o ensino-aprendizado da Matemática não pode ser limitado por sua aplicabilidade. Porém os alunos serão beneficiados, pois sempre que possível o professor deve contextualizar o conteúdo matemático para retirar o aluno da condição de espectador passivo e provocar aprendizagens significativas que mobilizem o aluno e estabeleçam entre ele e o objeto do conhecimento uma relação de reciprocidade.

Fica como recomendação a necessidade de uma nova abordagem que se faz necessária, uma vez que pouco se fala ou quase nada sobre as secções cônicas no ensino médio, em parte por que a maioria dos professores considera o tópico de difícil entendimento pelos alunos que não conseguem ver a sua aplicabilidade no cotidiano.

O trabalho foi importante, pois mostrou que é possível no ensino das cônicas, permitir ao aluno a visualização de suas aplicações, equações e a relação entre os denominadores da equação e a posição dos focos entre os eixos da elipse, suas relações matemáticas e demais relações que há entre a equação reduzida da elipse.

**6-REFERÊNCIAS**

IESSI, Gelson. **Fundamentos da matemática elementar**, vol. 07, geometria analítica, 4ª edição, ed. Atual, São Paulo. 1993.

LELLIS, M.. Imenes, Luiz Márcio. **A Matemática e o novo ensino médio.** Educação Matemática em Revista, número 9, ano 8.

MINAYO, M. C. **Pesquisa Social: Teoria, Método e Criatividade**. 13ª Ed. São Paulo: Vozes, 1994.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A**. História na Educação Matemática: Proposta e desafios**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

PAIVA, M. **Matemática**, vol. 03, ed. moderna, São Pulo, 1999.

SMOLE, K. C. KIYUKAWA, S., **Matemática**, vol. 03, ed. Saraiva, São Paulo, 1998.

SWOKOWISKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

Disponível em< http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm26/brevehistoria > acessado em 10 de maio de 2010 ás 15:00 horas.

DANTE, L. R. **Coleção matemática**. 1. ed. São Paulo, Ática, 2004.

IESSI, Gelson. **Fundamentos da matemática elementar**, vol. 07, geometria analítica, 4ª edição, ed. Atual, São Paulo. 1993

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. 2. ed. Campinas, SP: Papirus,1997. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

PERRENOUD, P. **As transformações na educação**. São Paulo, SP: Artes Médicas, 2001.

SWOKOWISKI, Earl W. **Cálculo com Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: Makron Books,1994

TONON, M. H. **Matemática**: **um olhar empático sobre o ensino-aprendizagem**. União da Vitória, PR: Face, 2004.

http://www.diadematematica.com/historia/Um\_pouco\_da\_historia\_da\_matematica.htm

http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/apolonio/conicas.htm

http://www.escolaecia.hpg.com.br/curiosidades.htm

http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia\_ViniciusMarinho.pdf

WINTERLE, P.; **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2000.

http://www.joaoelias.com/biblioteca/apostila%20engenharia%20usabi lidade.pdf

WHITE, Ellen. G. **Educação**. 7. ed. Santo André: Casa Publicadora Brasileira, 1997.

1. Valdo Fernandes Cavalcante, Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), Especialista em Metodologia do Ensino de Matemática e Física pela (FATEC/FACINTER), orientador de TCC do EAD IFPB. [↑](#footnote-ref-1)
2. Licenciatura em Matemática, (PUCPR) Bacharelado em Matemática (PUCPR), Especialista em Didática do Ensino Superior (PUCPR), Mestrado em Educação (PUCPR), Doutorado em Engenharia Florestal (UFPR), orientador de TCC do Grupo Uninter. [↑](#footnote-ref-2)